リーマン面上のコロナ問題(函数環に関連した諸問題)

原, 優

数理解析研究所講究録
523巻 1984年 86-95

リーマン面上のコロナ問題

名城大・理工　原 優 (Masaru Hara)

リーマン面 R 上の有界正則函数環 $H^\infty(R)$ の n 個の組 $\{f_j\}$ が次の条件を満たすとき，指数 (n,δ) のコロナデータと呼ぶ：(1) $\max_{1\le j\le n}(\sup_R |f_j|)\le 1$，(2) $\inf_R(\sum_{j=1}^n |f_j|)\ge\delta$． n 個の組 $\{g_j\}$ が $\sum_{j=1}^n f_j g_j = 1$ を満たすとき，$\{f_j\}$ のコロナ解と呼ぶ．R の任意のコロナデータに対してコロナ解が存在するとき，R においてコロナ定理が成り立つと言う．$C(R;n,\delta)=\sup_{\{f_j\}}(\inf_{\{g_j\}}(\max_{1\le j\le n}(\sup_R|g_j|)))$ を指数 (n,δ) の R の Gamelin 定数と呼ぶ．任意の指数 (n,δ) に対して $C(R;n,\delta)<\infty$ ならば，コロナ定理は成り立つ．

次の4結果について述べる．1. 全ての PW型 (Parreau-Widom 型) の平面領域でコロナ定理が成り立てば，全ての平面領域でコロナ定理が成り立つ．2. Gamelin の定理の1つの拡張．3. m 葉の単位円板上の非有界被覆面 R の Gamelin 定数 $C(R;n,\delta)$ は m,n,δ，にだけに従属する定数 $c(m,n,\delta)$ で抑えられる．特に R が g 個の genus，c 個の境界成分を持つリーマン面のとき，

$C(R;n,\delta)\le c(2-\chi;n,\delta)$，ただし χ はRのEuler数を表わす。

4. コロナ定理が成り立つhyperbolically rareな2葉の円板列を持つ平面領域。

上記1,2の結果はここで初めて述べる。上記3の結果は共同研究の成果（Hara and Nakai [9]）で他の所に発表する予定でいる。上記4の結果はHara [8]による。

1. 平面領域でのコロナ問題

コロナ定理が成り立たないリーマン面がCole（Gamelin [5]）によって作られた。PW型でも存在することがNakai [10]によって証明された。任意の平面領域においてコロナ定理が成り立つかどうかは未解決である。

定理1. 全てのPW型の平面領域でコロナ定理が成り立てば、全ての平面領域でコロナ定理が成り立つ。

証明. 証明はNakai [11]と同じであるが、定理3の証明の時に利用したいので書く。或る平面領域Wでコロナ定理が成り立たないとすると、正規族の議論により、次の条件を満たす指数 (n,δ)，Wの正則exhaustion $\{W_k\}$，$H^\infty(W)$ の関数 f_{kj} $(1\le j\le n, k\ge 1)$ が存在する：(1) $\{f_{kj}\}$ は指数 (n,δ) のコロナデータ，(2) 任意の W_k における $\{f_{kj}\}$ のコロナ解 $\{g_j\}$ は $\max_{1\le j\le n}(\sup_{W_k}|g_j|)>k+1$。$W_k$ の1つの境界が $\{|z-3k|=1\}$ に写る W_k から $\{|z-3k|<1\}$ の内側に写す等角写像を ψ とおく。今後 $\psi(W_k)$ を W_k，$f_{kj}\circ\psi^{-1}$ を f_{kj} と

書く．線分 $[3k+1, 3k+2]$ を l_k と書く．$\bigcup_{n=1}^{k-1}(W_n \cup l_n) \cup W_k$ 上の連続関数 φ_1 と W_{k+1} 上の連続関数 φ_2 に対して，$\bigcup_{n=1}^{k}(W_n \cup l_n) \cup W_{k+1}$ 上の連続関数 $[\varphi_1, \varphi_2]$ を次の様に定義する：$[\varphi_1, \varphi_2] | \bigcup_{n=1}^{k-1}(W_n \cup l_n) \cup W_k = \varphi_1$, $[\varphi_1, \varphi_2] | W_{k+1} = \varphi_2$, $0 \leq t \leq \frac{1}{3}$ のとき $[\varphi_1, \varphi_2](3k+t) = (1-3t)\varphi_1(3k+1) + 3t\exp(i\{\arg\varphi_1(3k+1)\})$, $\frac{1}{3} \leq t \leq \frac{2}{3}$ のとき $[\varphi_1, \varphi_2](3k+t) = \exp(i\{(2-3t) \times \arg\varphi_1(3k+1) + (3t-1)\arg\varphi_2(3k+2)\})$, $\frac{2}{3} \leq t \leq 1$ のとき $[\varphi_1, \varphi_2](3k+t) = (3-3t)\exp(i\{\arg\varphi_2(3k+2)\}) + (3t-2)\varphi_2(3k+2)$, ただし $\arg 0 = 0$ とおく．

$\overline{W_1} \cup l_1 \cup \overline{W_2}$ と $[f_{1j}, f_{2j}]$ に対して，Bishopの近似定理により，次の条件を満たす帯 $L_1 \supset l_1$, $\overline{W_1} \cup \overline{L_1} \cup \overline{W_2}$ の近傍で正則な関数 g_j $(1 \leq j \leq n)$ が存在する：$\overline{W_1} \cup \overline{L_1} \cup \overline{W_2}$ で $|g_j - [f_{1j}, f_{2j}]| < 2^{-1} 2^{-1-1} n^{-1} \delta$．上記の g_j を $A[f_{1j}, f_{2j}]$ と書く．一般に $A[A[f_{1j}, \cdots, f_{kj}], f_{k+1\,j}] = A[f_{1j}, \cdots, f_{k+1\,j}]$ と書くと次の条件を満たす帯 $L_k \supset l_k$ が存在する：$\bigcup_{n=1}^{k}(\overline{W_n} \cup \overline{L_n}) \cup \overline{W_{n+1}}$ で $|A[f_{1j}, \cdots, f_{k+1\,j}] - [A[f_{1j}, \cdots, f_{kj}], f_{k+1\,j}]| < (k+1)^{-1} \times 2^{-k-1} n^{-1} \delta$．$W_\infty = \bigcup_n (W_n \cup L_n)$ とおく．

領域Dの Betti数をB(D)と書く．線分 $\{3k + \frac{3}{2} + it : |t| < \delta_k\}$ を $\gamma_k(\delta_k)$ と書く．領域 $(W_\infty \cap \{\mathrm{Re}\, z < 3k + \frac{3}{2}\}) \setminus \bigcup_{n=1}^{k-1}(\{\mathrm{Re}\, z = 3n + \frac{3}{2}\} \setminus \gamma_n(\delta_n))$ を R_k と書く．$a \in W_1$ を選ぶ．R_k の a を極とするグリーン関数を G_k とおく．正数の数列 $\{\varepsilon_k\}, \{\delta_k\}$ を次の様に選ぶ：$B(\{G_k > \varepsilon_k\}) = B(R_k)$, $\sup_{\gamma_n(\delta_n)} G_{k+1} < \varepsilon_n$ $(1 \leq n \leq k)$．領域 $R = \bigcup_{k=1}^{\infty} R_k$ の a を極とするグリーン関数を G とおくと全ての k に対して

$\sup_{\gamma_k(\delta_k)} G \leq \varepsilon_k$ より，$B(\{G>\varepsilon_k\}) \leq B(R_k) = B(\bigcup_{n=1}^{k-1}(W_n \cup L_n) \cup W_k)$ 故に $\int B(\{G>\alpha\})d\alpha \leq \sum(\varepsilon_{k-1}-\varepsilon_k)B(R_k)$. 適当に$\{\varepsilon_k\}$, $\{\delta_k\}$を選べば，RはPW型となる（Widom[14]，PW型面についてはHasumi[10]を参照）.

Rにおいてコロナ定理が成り立たない事を示す．Rの構成法より $f_j = \lim_{k\to\infty} A[f_{1j},\cdots,f_{kj}]$ $(1\leq j\leq n)$ とおくと $f_j \in H^\infty(R)$ は次の性質を持つ：(1) W_kにおいて $|f_j - f_{kj}| \leq \sum_{l=k}^{\infty} l^{-1}2^{-l}n^{-1}\delta$，特に $|f_j|\leq 2$，(2) $\sum_{j=1}^{n}|f_j| \geq \frac{1}{2}\delta$． 故に$\{\frac{1}{2}f_j\}$はRの指数$(n,\delta)$のコロナデータである．今Rでコロナ定理が成り立つとする．$\{\frac{1}{2}f_j\}$のコロナ解を$\{g_j\}$とおくと $\max_{1\leq j\leq n}(\sup_{W_k}|g_j|) > k$. そうでないならば，$|\sum(f_j - f_{kj})g_j| \leq \sum|f_j - f_{kj}|k < nk\sum_{l=k}^{\infty} l^{-1}2^{-l}n^{-1}\delta < 1$ より又 $\sum f_{kj}g_j(2-\sum(f_j-f_{kj})g)^{-1} = 1$ と$\{f_{kj}\}$の作り方より $\max_{1\leq j\leq n}(\sup_{W_k}|g_j|) \geq k+1$ となるから矛盾が出る．そして $\max_{1\leq j\leq n}(\sup_{W_k}|g_j|) \geq k$ は $g_j \in H^\infty(R)$ に反する．故にRはPW型のコロナ定理が成り立たない平面領域となり定理の仮定に反する． （証明終）

2. Gamelinの定理の1つの拡張

Rを有限リーマン面とする．$P_0 \in R$を極に持つグリーン関数をGと書く．このGに関する可積ハーディ族を$H^1(R)$と書く．

補題1. $F\in H^1(R)$，$h, h_1, h_2 \in H^\infty(R)$ のとき

(1) $\iint_R |F'h'|G\,dxdy \leq 2\pi\|F\|_1\|h\|_\infty$,

(2) $\iint_R |Fh_1'h_2'|G\,dxdy \leq 2\pi\|F\|_1\|h_1\|_\infty\|h_2\|_\infty$.

証明. fが$\bar{R}$で正則でP_0以外で零点を持たないとき，グリーンの公式より $\iint_R |(\sqrt{f})'|^2 G\, dxdy \leq \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{\partial R} |f| \frac{\partial G}{\partial n} ds\right)$. これを利用して，Gamelin[6]の証明を見れば，$\bar{R}$で正則でP_0以外で零点を持たないF, h, h_1, h_2に対して補題の(1)(2)が成り立つ．一般のF, h, h_1, h_2に対してRからF, h, h_1, h_2のP_0以外の零点を除いた領域の正則exhaustionを$\{R_n\}$とおく．R_nのP_0を極とするグリーン関数をG_n, G_nに関する$H^1(R_n)$, $H^\infty(R_n)$のノルムを$\|\cdot\|_{1n}$, $\|\cdot\|_{\infty n}$と書く．$f \in H^i(R)$ $(i=1,\infty)$に対して$\|f\|_{in} \leq \|f\|$, $G_n \leq G_{n+1}$で$G_n \uparrow G$から補題が成り立つことが分かる．　　　（証明終）

定義. Gの共役関数をG^*と書く．$d(G+iG^*)$の零点を$P_1, \cdots, P_e$とし，P_iでの零点の位数をα_iと書く．b_0はP_0で単根を持ちそれ以外では$\bar{R}$で零を取らない$\bar{R}$の正則関数，bは$P_1, \cdots, P_e$の各P_iで位数α_iの零点を持ちそれ以外では$\bar{R}$で零を取らない$\bar{R}$の正則関数とする．

補題2. $\{f_j\}$を$\bar{R}$で正則なRの指数(n, δ)のコロナデータとし，$h_j = \bar{f}_j / \sum_k |f_k|^2$, $w_{jk} = \frac{1}{\pi}\iint_S C(z,\cdot)\, h_j \frac{\partial}{\partial \bar{z}} h_k\, dxdy$ とおく．ただしSを$\bar{R} \subset S$でf_j, b_0, bが$\bar{S}$で正則である有限リーマン面とし，$C(z,\cdot)$をS上のコーシー核とする．

このとき次の条件を満たす$\psi_{jk} \in H^\infty(R)$ $(1 \leq j, k \leq n)$およびn, δだけで定まる数$C(n,\delta)$が存在する：$\|w_{jk} + \psi_{jk} b^{-1}\| \leq C(n,\delta)$.

証明. ∂R上のsupノルムを$\|\cdot\|$と書く．

共役空間の議論より，$\inf\{\|w_{jk}+\psi b^{-1}\| : \psi\in C(\partial R)\cap H^{\infty}(R)\}$
$=\sup\{|\int_{\partial R} w_{jk}\,d\mu| : \mu$ は全変分 $\|\mu\|\leq 1$ で $b^{-1}(C(\partial R)\cap H^{\infty}(R))$ に直交する$\}$.
直交性 $b^{-1}\mu\perp C(\partial R)\cap H^{\infty}(R)$ と R で零を取らない微分 $b_0 b^{-1}d(G+iG^{*})$ からRoyden[13]の定理により次の条件を満たす $F\in H^{1}(R)$ が存在する：$b^{-1}\mu = F b_0 b^{-1} d(G+iG^{*})$． 又 ∂R 上 $d(G+iG^{*})=\frac{\partial G}{\partial n}ds$ より上記の値 $=\sup\{|\int_{\partial R} w_{jk} b_0 F \frac{\partial G}{\partial n} ds| : \|b_0 F\|_1\leq 1, F\in H^{1}(R)\}\leq \sup\{|\iint_R \Delta(w_{jk}F)G\,dxdy|$ $: F\in H^{1}(R), \|F\|_1\leq 1\}$. 最後の不等式および補題2の結果はGamelin [6]と同様にして証明できる． (証明終)

定理2. 有限リーマン面 R の指数 (n,δ) のコロナデータ $\{f_j\}$ に対して，次の条件を満たす有理型関数 $\{g_j\}$ が存在する：
(1) g_j は各 P_i $(1\leq i\leq e)$ で位数が高々 α_i の極を持ちそれ以外では極を持たない，(2) $\operatorname{ess.sup}_{\partial R}|g_j|\leq C(n,\delta)$ ，(3) $\sum f_j g_j = 1$ ．

証明. $R_m=\{G>\frac{1}{m}\}$ とおくと，$\{R_m\}$ は R の正則exhaustionである．$\{f_j\}$ を R_m に制限して作った w_{jk} を w_{jkm} と書き，補題2より定まる ψ_{jk} を ψ_{jkm} と書く．

$$g_{jm} = h_j + \sum_k\{(w_{jkm}+\psi_{jkm}b^{-1})-(w_{kjm}+\psi_{kjm}b^{-1})\}f_k$$

とすると，$\{g_{jm}\}$ は定理の(1)，(2) $\operatorname{ess.sup}_{\partial R_m}|g_{jm}|\leq C(n,\delta)$ ，(3)を満たす．$\{b g_{jm}\}$ は一様有界．$P_1,\cdots,P_e$ の近傍を U とおくと $\{g_{jm}\}$ は $R\setminus\overline{U}$ において一様有界．正規族の議論により，$\{g_{jm}\}$ の適当な部分列は R で広義一様収束する．その極限関数を g_j と書くと $\operatorname{ess.sup}_{\partial R}|g_j|\leq C(n,\delta)$． $\{g_j\}$ が求める関数である． (証明終)

定理2において，Rが単位円板の場合， $P_i\ (1\leq i\leq e)$ は存在しないから $\{g_j\}$ は正則関数になる．これが Gamelin[6]の結果である．村井隆文氏は平面領域の場合に証明している．

3. m葉円板の Gamelin定数

単位円板上のm葉非有界な被覆面をm葉円板と呼ぶ．m葉円板全体を $\mathcal{C}(m)$ とおき $c(m;n,\delta)=\sup\{C(R;n,\delta):R\in\mathcal{C}(m)\}$ とする．$R\in\mathcal{C}(m)$ においてコロナ定理が成り立つことが知られている(Alling[2], Hara[7], Nakai[12])．

定理3．(Hara and Nakai[9]) $c(m;n,\delta)<\infty$.

証明．概略を示す(詳細は[9]に在る)．今或る指数 (n,δ) に対して $c(m;n,\delta)=\infty$ とすると，次の条件を満たす $\{R_k\}\subset\mathcal{C}(m)$, $\{f_{kj}\}\subset H^\infty(R_k)$ が存在する：(1) $\{f_{kj}\}$ は R_k における指数 (n,δ) のコロナデータ，(2) $\{f_{kj}\}$ の任意のコロナ解 $\{g_j\}$ は $\max_{1\leq j\leq n}(\sup_{R_k}|g_j|)>k+1$．被覆面から単位円板 Δ への射影写像を π と書く．各 R_k に対して，次の条件を満たす $1>r_k>0$ が存在する： $W_k=\pi^{-1}(|z|<r_k)$ とおくと，(1) 任意の $\{f_{kj}\}$ のコロナ解 $\{g_j\}$ は $\max_{1\leq j\leq n}(\sup_{W_k}|g_j|)>k+1$, (2) ∂W_k に分枝点が存在しない．$\Delta_k=\{|z-3k|<r_k\}$ とおく．複素平面 $\mathbb{C}$ のm葉被覆面 $\mathbb{C}^m$ の射影写像も π と書く．全ての $\pi^{-1}(\Delta_k)$ を $\mathbb{C}^m$ から取り除いて代りに W_k を埋め込んで出来る $\mathbb{C}$ 上のm葉被覆面を S とおき，その射影写像も π と書く．定理1の証明と同様にして，Δ_k と Δ_{k+1} を線分 l_k で結び，W_k と W_{k+1} をm個

の線分$\pi^{-1}(l_k)$で各葉ごとに結ぶ．L_kをl_kを含む帯とすると，$\pi^{-1}(L_k)$はW_kとW_{k+1}を結ぶm個の帯である．定理1と同様な近似が$R=\bigcup_k(W_k\cup\pi^{-1}(L_k))$で成り立つ様に$L_k$を取るならば，定理1と同様にして，Rにおいてコロナ定理が成り立たない．しかし作り方より$D=\bigcup_k(\Delta_k\cup L_k)$は単連結領域であるからRは$\mathcal{C}(m)$に属する．故にRにおいてコロナ定理が成り立つ．これは矛盾である．　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　(証明終)

系．Rがg個のgenus，c個の境界成分を持つリーマン面のとき，$C(R;n,\delta)\le c(2g+c;n,\delta)=c(2-\chi;n,\delta)<\infty$．ただし$\chi$はRのEuler数である．

証明．Ahlfors[1]の定理によって，Rは$\bigcup_{c\le m\le 2g+c}\mathcal{C}(m)$に属する．$c(m;n,\delta)\le c(m+1;n,\delta)$が成り立つ（証明は論文[9]に在る）ので，$C(R;n,\delta)\le c(2g+c;n,\delta)$．　　　　　　(証明終)

系はGamelin[4]の結果　$C(m;n,\delta)=\sup\{C(R;n,\delta)$：m個の境界成分を持つ平面領域R$\}<\infty$　の一般化になっている．

4．2葉の円板列を持つ平面領域

Vを平面領域とする．$\{\Delta_n\}$をVに含まれるhyperbolically rareな円板列とする，即ち次の条件を満たす円板列$\{D_n\}$が存在する：(1) D_nはΔ_nと同じ中心α_nを持つ，(2) $\overline{\Delta}_n\subset D_n\subset\overline{D}_n\subset V$，(3) $d(\alpha_n,\partial V)\to 0$ $(n\to\infty)$，ただしdは距離，(4) $\{\overline{D}_n\}$は互いに素，(5) $r(D_n)/d(\alpha_n,\partial V)\to 0$ $(n\to\infty)$，ただしrは円板の半径，

(6) $\sum_n r(\Delta_n)/r(D_n)<\infty$. Δ_nの複製を$\tilde{\Delta}_n$とおく。Δ_nと$\tilde{\Delta}_n$に有限個の同じ切れ目を入れ，各切れ目ごとに互い違いに貼り合わせて出来るリーマン面を$\Delta_n+\tilde{\Delta}_n$と書く。$V$からすべての$\Delta_n$を取り除いて，各$\Delta_n$の代りに$\Delta_n+\tilde{\Delta}_n$を置き換えて出来るリーマン面を$V+\bigcup_n\tilde{\Delta}_n=(V\setminus(\bigcup_n\Delta_n))\cup(\bigcup_n(\Delta_n+\tilde{\Delta}_n))$と書く。

定理4. (Hara[8]) $\{\Delta_n+\tilde{\Delta}_n\}$が相似で，$V$でコロナ定理が成り立てば，$V+\bigcup_n\tilde{\Delta}_n$においてもコロナ定理が成り立つ。

定理5. $\{\Delta_n+\tilde{\Delta}_n\}$の切れ目の数が一定数以下で，$V$が単位円板から原点を除いた平面領域で，$\{\Delta_n\}$が原点に収束するならば，$V+\bigcup_n\tilde{\Delta}_n$においてもコロナ定理が成り立つ。

証明. $R=V+\bigcup_n\tilde{\Delta}_n$とおく。$f\in H^\infty(R)$に対して，$z\in D_n\setminus\bar{\Delta}_n$で$P_nf(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Delta_n}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=f(z)-\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_n}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$より$P_nf\in H^\infty(\hat{\mathbb{C}}+\tilde{\Delta}_n)$, $P_nf(\infty)=0$。ただし$\hat{\mathbb{C}}$はリーマン球面を表わす。$z\in\partial\Delta_n$で$|f(z)-P_nf(z)|\le(r(D_n)/(r(D_n)-r(\Delta_n)))\|f\|$より$\sup_n\|P_nf\|<\infty$. $z\in D_n^c$で$|(z-a_n)P_nf(z)|\le r(\Delta_n)\|P_nf\|$より$|P_nf(z)|\le(r(\Delta_n)/r(D_n))\|P_nf\|$.
故に$P_0f=f-\sum_{n=1}^\infty P_nf$とおくと$P_0f\in H^\infty(V)$，ただし$\Delta_n+\tilde{\Delta}_n$では同じ座標を持つ点で$P_0f$は同じ値を持つとする。$H_0(\{\hat{\mathbb{C}}+\tilde{\Delta}_n\})=\{\{f_n\}:f_n\in H^\infty(\hat{\mathbb{C}}+\tilde{\Delta}_n),f_n(\infty)=0,\sup_n\|f_n\|<\infty\}$とおくと$H^\infty(R)=H^\infty(V)+H_0^\infty(\{\hat{\mathbb{C}}+\tilde{\Delta}_n\})$。定理3の系より$\sup_m C(\hat{\mathbb{C}}+\tilde{\Delta}_m;n,\delta)<\infty$。定理4の証明はBehrens[3]の定理6.1，定理5の証明は同論文の定理8.1と同様な証明をすればよい。 (証明終)

参考文献

[1] L. Ahlfors: Open Riemann surfaces and extremal problems on compact subregions, Comm. Math. Helv., 24 (1950), 100 - 134.

[2] N. Alling: Extensions of meromorphic function rings over non-compact Riemann surfaces, I, Math. Z., 89 (1965)/ II, Math. Z., 93 (1966), 345 - 394.

[3] M. Behrens: The maximal ideal spaces of algebras of bounded analytic functions on infinitely connected domains, Trans. Amer. Math. Soc., 161 (1971), 359 - 379.

[4] T. Gamelin: Localization of the corona problem, Pacific J. Math., 34 (1970), 73 - 81.

[5] T. Gamelin: Uniform Algebras and Jensen Measures, London Math. Soc. Lecture Note Series 32, 1978.

[6] T. Gamelin: Wolff's proof of the corona theorem, Israel J. Math., 37 (1980), 113 - 119.

[7] M. Hara: The corona problem on 2-sheeted disks, Proc. Japan Acad., 58 (1982), 256 - 257.

[8] M. Hara: On Gamelin constants, Pacific J. Math., 110 (1984), 77 - 81.

[9] M. Hara and M. Nakai: Corona theorem with bounds for finitely sheeted disks, preprint.

[10] M. Hasumi: Hardy Classes on Infinitely Connected Riemann Surfaces, Springer Lecture Notes in Math. 1027, 1983.

[11] M. Nakai: Corona problem for Riemann surfaces of Parreau-Widom type, Pacific J. Math., 103 (1982), 103 - 109.

[12] M. Nakai: The corona problem on finitely sheeted covering surfaces, Nagoya Math. J., 92 (1983), 163 - 173.

[13] H. Royden: The boundary values of analytic functions, Math. Z., 78 (1962), 1 - 24.

[14] H. Widom: The maximum principle for multiple-valued analytic functions, Acta Math., 126 (1971), 63 - 82.